一个包含 Smarandache 函数及第二类伪 Smarandache 函数的方程

蹇龙江

(商洛职业技术学院, 陕西 商洛 726000)

摘要：主要研究方程 $Z_2(n)+1=S(n)$ 的可解性, 利用初等方法以及 Smarandache 函数的性质, 证明了该方程有无穷多个正整数解, 并获得了所有正整数解的具体表现形式.

关键词：Smarandache 函数; 第二类伪 Smarandache 函数; 函数方程; 正整数解

中图分类号：O156.4 **文献标识码：**A **文章编号：**1008-5513(2011)05-0577-04

1 引言及结论

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m!$. 即 $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. 而第二类伪 Smarandache 函数 $Z_2(n)$ 定义为最小的正整数 k 使得 n 整除 $\frac{k^2(k+1)^2}{4}$, 或者

$$Z_2(n)=\min\left\{k:\ k\in\mathbb{N},\ n\ \Big|\ \frac{k^2(k+1)^2}{4}\right\},$$

其中 $\mathbb{N}$ 表示所有正整数之集合. 这两个函数以及有关 Smarandache 函数的定义可参阅文献 [1-2]. 从 $S(n)$ 及 $Z_2(n)$ 的定义容易推出它们的前几项值为:

$$S(1)=1,S(2)=2,S(3)=3,S(4)=4,S(5)=5,S(6)=3,S(7)=7,S(8)=4,\cdots.$$

$$Z_2(1)=1,Z_2(2)=3,Z_2(3)=2,Z_2(4)=3,Z_2(5)=4,Z_2(6)=3,Z_2(7)=6,Z_2(8)=7,\cdots.$$

关于 $S(n)$ 的初等性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有意义的结果 [3-8]. 例如文献 [3] 研究了方程

$$S\left(m_1+m_2+\cdots+m_k\right)=\sum_{i=1}^{k}S\left(m_i\right)$$

的可解性, 利用解析数论中著名的三素数定理证明了对任意正整数 $k\geq 3$, 该方程有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,\ m_k)$.

收稿日期：2011-03-08.

基金项目：国家自然科学基金 (11071194).

作者简介：蹇龙江 (1960-), 副教授, 研究方向：基础数学.

文献 [4] 研究了 $S(n)$ 的值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

文献 [5-6] 研究了 $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$ 的下界估计问题, 证明了对任意素数 $p\ge 7$, 有估计式

$$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)\ge 6p+1 \text{ 及 } S\left(2^p+1\right)\ge 6p+1.$$

最近, 文献 [7] 获得了更一般的结论: 即证明了对任意素数 $p\ge 17$ 和任意不同的正整数 a 及 b, 有估计式

$$S\left(a^p+b^p\right)\ge 8p+1.$$

此外, 文献 [8] 讨论了 Smarandache 函数的另一种下界估计问题, 即 Smarandache 函数对费尔马数的下界估计问题, 证明了对任意正整数 $n\ge 3$ 有估计式:

$$S(F_n)=S\left(2^{2^n}+1\right)\ge 8\cdot 2^n+1,$$

其中 $F_n=2^{2^n}+1$ 为著名的费尔马数.

关于 $S(n)$ 的其它研究内容非常之多, 这里不再一一列举. 而对于函数 $Z_2(n)$ 的性质, 我们至今了解的很少, 甚至不知道这个函数的均值是否具有渐近性质.

本文的主要目的是利用初等方法研究函数方程 $Z_2(n)+1=S(n)$ 的可解性, 并获得了这个方程的所有正整数解, 具体地说也就是证明了下面的:

定理 对任意正整数 n, 函数方程 $Z_2(n)+1=S(n)$ 有且仅有下列三种形式的解:

(A) $n=3,\ 4,\ 12,\ 3^3,\ 2\cdot 3^3,\ 2^2\cdot 3^3,\ 2^3\cdot 3^3,\ 2^4\cdot 3^3,\ 3^4, 2\cdot 3^4,\ 2^2\cdot 3^4,\ 2^3\cdot 3^4,\ 2^4\cdot 3^4$;

(B) $n=p\cdot m$, 其中 $p\ge 5$ 为素数, m 为整除 $\frac{(p-1)^2}{4}$ 的任意正整数;

(C) $n=p^2\cdot m$, 其中 $p\ge 5$ 为素数且 $2p-1$ 为合数, m 为 $(2p-1)^2$ 的任意大于 1 的因数.

显然该定理彻底解决了方程 $Z_2(n)+1=S(n)$ 的可解性问题. 亦即证明了这个方程有无穷多个正整数解, 并给出了它的每个解的具体形式.

2 定理的证明

本节利用初等方法以及 Smarandache 函数的性质给出定理的直接证明. 有关自然数的整除性质以及素数的有关内容可参阅文献 [9-11]. 事实上容易验证: 当

$$n=3,\ 4,\ 12,\ 3^3,\ 2\cdot 3^3,\ 2^2\cdot 3^3,\ 2^3\cdot 3^3,\ 2^4\cdot 3^3,\ 3^4, 2\cdot 3^4,\ 2^2\cdot 3^4,\ 2^3\cdot 3^4,\ 2^4\cdot 3^4$$

时, 方程 $Z_2(n)+1=S(n)$ 显然成立. 现在分下面几种情况详细讨论:

当 $S(n)=S(p)=p\ge 5$ 时, 设 $n=mp$, 则 $S(m)<p$ 且 $(m,p)=1$. 此时若 n 满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$, 那么 $Z_2(n)=p-1$, 所以由 $Z_2(n)$ 的定义有 n 整除 $\frac{(p-1)^2p^2}{4}$, 即 $mp\mid\frac{(p-1)^2p^2}{4}$. 所以 $m\mid\frac{(p-1)^2}{4}$, 因此 m 为 $\frac{(p-1)^2}{4}$ 的任意正因数. 反之, 当 $n=mp$

且 $m \mid \frac{(p-1)^2}{4}$ 时, 有 $S(n)=p$, $Z_2(n)=p-1$, 所以 $n=mp$ 是方程 $Z_2(n)+1=S(n)$ 的解. 于是证明了定理中的第二种情况 (B).

当 $S(n)=S(p^2)=2p$, $p\geq 5$ 时, 设 $n=mp^2$, 则 $S(m)<2p$ 且 $(m,p)=1$. 此时若 n 满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$, 那么 $Z_2(n)=2p-1$, 所以由 $Z_2(n)$ 的定义有 n 整除 $(2p-1)^2p^2$, 所以

$$mp^2 \mid (2p-1)p^2, \text{ 或者 } m \mid (2p-1)^2.$$

显然 $m\neq 1$, 否则 $n=p^2$, $S(p^2)=2p$, 而 $Z_2(p^2)=p-1$. 所以此时 $n=p^2$ 不满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$. 于是 m 必须是 $(2p-1)^2$ 的一个大于 1 的因数. 此外, 因为 $2p-1$ 为合数, 故当 $n=mp^2$ 时, $Z_2(n)\neq p-1$, $Z_2(n)\neq p$, 所以 $Z_2(n)=2p-1$, 而 $S(n)=2p$, 所以 $n=mp^2$ 满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$. 于是证明了定理中的情形 (C).

现在证明当 $S(n)=S(p^\alpha)$ 且 $p\geq 5$ 以及 $\alpha\geq 3$ 时,n 不满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$. 这时设 $n=mp^\alpha$, $S(m)\leq S(p^\alpha)$, $(m,p)=1$. 于是有 $S(n)=hp$, 这里 $h\leq\alpha$. 若 n 满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$, 则 $Z_2(n)=hp-1$. 于是由 $Z_2(n)$ 的定义有

$$n=mp^\alpha \left| \frac{(hp-1)^2)m^2p^2}{4}\right. .$$

从而由整除性的性质可知 $p^{\alpha-2}\mid h^2\leq\alpha^2$. 所以 $p\mid h$. 故 $\alpha\geq h\geq 5$. 当 $p\geq 5$ 且 $\alpha\geq 5$ 时, $p^{\alpha-2}\mid h^2\leq\alpha^2$ 是不可能的, 因为此时有不等式 $p^{\alpha-2}>\alpha^2$.

现在考虑 $S(n)=3$, 此时 $n=3$ 或者 6. 经验证 $n=3$ 是方程 $Z_2(n)+1=S(n)$ 的一个解; 当 $S(n)=S(3^2)=6$ 时, $n=9,\ 18,\ 36,\ 45$, 经验证它们都不满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$; 当 $S(n)=S(3^3)=9$ 时,

$$n=3^3,\ 2\cdot 3^3,\ 2^2\cdot 3^3,\ 5\cdot 3^3, 7\cdot 3^3,\ 2^3\cdot 3^3, 10\cdot 3^3,\ 14\cdot 3^3,\ 16\cdot 3^3, 20\cdot 3^3.$$

此时经验证

$$n=3^3,\ 2\cdot 3^3,\ 2^2\cdot 3^3,\ 2^3\cdot 3^3,\ 2^4\cdot 3^3$$

满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$; 同样可以推出当 $S(n)=S(3^4)=9$ 时, 只有

$$n=3^4,\ 2\cdot 3^4,\ 2^2\cdot 3^4,\ 2^3\cdot 3^4,\ 2^4\cdot 3^4$$

满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$.

最后考虑 $S(n)=S(2^\alpha)$. 显然 $n=1,\ 2$ 不满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$. 若 $S(n)=S(4)=4$, 那么 $n=4,\ 12$. 经验证 $n=4,\ 12$ 满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$; 当 $S(n)=S(2^3)=4$ 时, 此时 $n=8,\ 24$. 经验证这样的 n 均不满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$; 当 $S(n)=S(2^4)=6$ 时, 此时 $n=16$, $3{\cdot}16$, $5{\cdot}16$, $15{\cdot}16$. 经检验它们均不满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$; 当 $S(n)=S(2^5)=8$ 时,

$$n=2^5,\ 3\cdot 2^5,\ 5\cdot 2^5,\ 7\cdot 2^5,\ 15\cdot 2^5,\ 21\cdot 2^5,\ 35\cdot 2^5,\ 105\cdot 2^5,$$

此时容易验证它们均不满足方程 $Z_2(n)+1=S(n)$; 当

$$S(n)=S(2^\alpha)=2h,\quad \alpha\geq\max\{6,\ h\}$$

时, 设 $n = m \cdot 2^\alpha$, 则 $S(m) < S(2^\alpha)$ 且 $(m, 2) = 1$. 此时若 n 满足方程 $Z_2(n) + 1 = S(n)$, 则由函数 $Z_2(n)$ 的定义, 知

$$n = m \cdot 2^\alpha \left| \frac{(2h-1)^2)(2h)^2}{4} = (2h-1)^2 h^2, \right.$$

由此推出 $2^\alpha \mid h^2 \le (\alpha - 1)^2 < \alpha^2$, 这个不等式及整除性是不可能的, 因为应用数学归纳法容易证明当 $\alpha \ge 6$ 时, $2^\alpha > (\alpha - 1)^2 \ge h^2$.

综合以上各种情况, 立刻完成定理的证明.

参考文献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Kenichiro Kashihara. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. NewMexico: Erhus University Press, 1996.

[3] Liu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006,2(1):76-79.

[4] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006,49(5):1009-1012.

[5] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2009,22(1):133-134.

[6] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008,24(4):706-708.

[7] 李粉菊, 杨畅宇. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2011,41(4):377-379.

[8] Wang Jinrui. On the Smarandache function and the Fermat numbers[J]. Scientia Magna, 2008,4(2):25-28.

[9] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[10] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[11] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

An equation involving the Smarandache function and the pseudo-Smarandache function of second kind

QIAN Long-jiang

(Shangluo Vocational and Technical College, Shangluo 726000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is to study the solvability of the equation $Z_2(n) + 1 = S(n)$, and give its all positive integer solutions. The elementary method and the properties of Smarandache function have been used to prove that the equation has infinite positive integer solutions, and give the exact expressions of all positive integer solutions for the equation.

Key words: Smarandache function, the pseudo-Smarandache function of second kind, functional equation, positive integer solution

2010 MSC: 11B83